Варианты домашнего задания по физике

для студентов II курса IV семестра всех факультетов

Вариант	Номера задач				
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5
6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6
7	1.7	2.7	3.7	4.7	5.7
8	1.8	2.8	3.8	4.8	5.8
9	1.9	2.9	3.9	4.9	5.9
10	1.10	2.10	3.10	4.10	5.10
11	1.11	2.11	3.11	4.11	5.11
12	1.12	2.12	3.12	4.12	5.12
13	1.13	2.13	3.13	4.13	5.13
14	1.14	2.14	3.14	4.14	5.14
15	1.15	2.15	3.15	4.15	5.15
16	1.16	2.16	3.16	4.16	5.16
17	1.17	2.17	3.17	4.17	5.17
18	1.18	2.18	3.18	4.18	5.18
19	1.19	2.19	3.19	4.19	5.19
20	1.20	2.20	3.20	4.20	5.20

При выполнении домашнего задания рекомендуется пользоваться методическими указаниями к решению задач по курсу общей физики. Авторы: Л.К. Мартинсон, Е.В. Смирнов. Разделы: "Волновые свойства частиц. Гипотеза де Бройля", "Уравнение Шредингера. Стационарные задачи квантовой механики", "Квантовые свойства атомов", "Измерение физических величин в квантовых системах", а также методическими указаниями к домашнему заданию по курсу общей физики (раздел "Элементы квантовой механики"). Эти пособия можно найти на сайте кафедры физики МГТУ.

http://fn.bmstu.ru/phys/2course/hometasks/index4s.html

Домашнее задание по физике

для студентов II курса IV семестра всех факультетов

1.1. Американский физик Р. Хофштадтер наблюдал дифракцию электронов с энергией $E = 750$ МэВ на ядрах ^{40}Ca. Согласно волновой теории при дифракции волны на сфере радиуса R минимумы интенсивности наблюдаются при углах дифракции θ, определяемых выражением $\sin\theta = m \cdot 0{,}61 \cdot \lambda/R$, где m - целое число, а λ - длина волны. В данном опыте дифракционному минимуму для $m = 3$ отвечал угол дифракции $\theta = 48^0$. Считая, что ядро имеет сферическую форму, найдите радиус ядра ^{40}Ca.

1.2. На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0, чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l? Решите задачу для электронов и протонов в случае $l = 10^{-18}$ м, что соответствует радиусу слабого взаимодействия.

1.3. При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

1.4. Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100$ пм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути прямоугольный порог высотой $U = 100$ эВ. Определите длину волны де Бройля частицы после прохождения порога.

1.5. Поток нейтронов проходит через узкие радиальные щели в двух дисках из кадмия, поглощающего нейтроны. Диски насажены на общую ось так, что щели повернуты друг относительно друга на угол α. Диски вращаются с угловой скоростью $\omega = 400$ рад/с, расстояние между ними $L = 1$ м. Найти угол α, если длина волны де Бройля пропускаемых таким устройством нейтронов равна $\lambda = 0{,}1$ нм.

1.6. Пучок электронов, прошедший ускоряющую разность потенциалов U, попадает из вакуума в металл, внутренний потенциал которого $\varphi = 5$ В. Найдите: а) показатель преломления металла n_e для электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 50$ В; б) отношение U/φ, при котором показатель преломления отличается от единицы не более чем на $\eta = 1\%$.

1.7. Условие Брэгга-Вульфа с учетом преломления электронных волн в кристалле имеет вид $2d\sqrt{n_e^2 - \cos^2\theta} = k\lambda$, где d - межплоскостное расстояние, n_e - показатель преломления, θ - угол скольжения, k - порядок отражения. Найдите с помощью этого условия угол θ, если пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 85$ В, образует максимум 2-го порядка при брэгговском отражении от кристаллических плоскостей с $d = 0{,}204$ нм. Внутренний потенциал монокристалла серебра $\varphi = 15$ В.

1.8. Коллимированный пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 30$ кВ, падает нормально на тонкую поликристаллическую фольгу золота. Постоянная кристаллической решетки золота $d = 0{,}41$ нм. На фотопластинке, расположенной за фольгой на расстоянии $l = 20$ см от нее, получена дифракционная картина, состоящая из ряда концентрических окружностей. Определите: а) длину волны де Бройля электронов λ; б) брэгговский угол $\theta_Б$, соответствующий первой окружности; в) радиус r первой окружности.

1.9. Покажите, что в атоме водорода и водородоподобных атомах на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля электрона. Определите длину волны де Бройля электрона на круговой орбите с главным квантовым числом n.

1.10. Узкий пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U, падает нормально на поверхность некоторого монокристалла. Под углом $\theta = 55^0$ к нормали к поверхности кристалла наблюдается максимум отражения электронов первого порядка. Определите U, если расстояние между отражающими атомными плоскостями кристалла составляет $d = 0{,}2$ нм.

1.11. При увеличении энергии электрона на $\Delta E = 200$ эВ его дебройлевская длина волны изменилась в $\eta = 2{,}0$ раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

1.12. Частица массы m движется в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы a. Найти значения энергии частицы, имея в виду, что возможны лишь такие состояния, для которых в яме укладывается целое число дебройлевских полуволн.

1.13. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре.

1.14. Частица массой m и зарядом q, имеющая дебройлевскую длину волны λ_0 влетает в пространство между обкладками плоского конденсатора параллельно им. Разность потенциалов между обкладками U, расстояние между ними d, длина пластин l. Найдите дебройлевскую длину волны частицы λ_1 после прохождения через конденсатор.

1.15. Две одинаковые частицы массы m с дебройлевскими длинами волн λ_1 и λ_2 движутся перпендикулярно друг другу. Найти дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс.

1.16. Нейтрон с кинетической энергией $E_К = 0{,}25$ эВ испытал упругое соударение с первоначально покоившимся ядром атома ^4He. Найдите длины волн обеих частиц в системе их центра масс до и после соударения.

1.17. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем: в цилиндре радиусом $R = 10$ см и длиной $L = 1{,}0$ м делается винтовой паз с поворотом на на угол $\varphi = 30^0$. Цилиндр вращается с частотой $n = 3000$ об/мин. Определите дебройлевскую длину волны нейтронов, пропускаемых этим монохроматором. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра.

1.18. Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью ширины $b = 1{,}0$ мкм. Определите скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние $l = 50$ см, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 0{,}36$ мм.

1.19. Параллельный поток электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 25$ В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми $d = 50$ мкм. Определите расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии $l = 100$ см от щелей.

1.20. При пропускании пучка нейтронов от ядерного реактора через блок прессованного графита все нейтроны с длинами волн де Бройля короче $\lambda_0 = 0{,}67$ нм испытывают интерференционное отражение Брэгга-Вульфа. Проходят через блок только медленные, так называемые холодные нейтроны. Определите максимальную температуру, соответствующую самым коротким волнам де Бройля нейтронов, пропускаемых графитом, а также вычислите постоянную d решетки графита.

2.1. Считая, что минимальная энергия E нуклона (протона или нейтрона) в ядре равна 10 МэВ, оцените, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

2.2. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода E_K составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оцените минимальные линейные размеры атома.

2.3. Покажите, используя соотношение неопределенностей, что электроны не могут входить в состав атомного ядра. Линейные размеры ядра считать равными $5 \cdot 10^{-15}$ м.

2.4. Покажите, что соотношения неопределенностей позволяют сделать вывод об устойчивости атома, т.е. о том, что электрон при движении по круговой орбите не может упасть на ядро.

2.5. Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии порядка $1{,}6 \cdot 10^{-4}$. Оцените, во сколько раз неопределенность координаты такой частицы больше ее дебройлевской длины волны.

2.6. Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определите среднее время жизни атома в возбужденном состоянии τ, если естественная ширина спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное $\Delta\lambda = 20$ фм, а длина волны излучения $\lambda = 600$ нм.

2.7. Частица массой m_0 движется в потенциальном поле, в котором ее потенциальная энергия равна $U = \dfrac{kx^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Оцените с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию частицы в этом поле.

2.8. Оцените относительную ширину $\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-8}$ с и длина волны излучаемого фотона $\lambda = 500$ нм.

2.9. Покажите с помощью отношения неопределенностей, что для движущейся частицы, неопределенность координаты которой равна длине волны де Бройля, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

2.10. Оцените с помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома $a = 10^{-10}$ м. Сравните полученную величину со скоростью электрона на первой боровской орбите.

2.11. Оцените наибольшую энергию связи $E_{св}$ электрона, локализованного в области пространства, радиус которого $r \sim 10^{-10}$ м (атом) и $r \sim 10^{-15}$ м (атомное ядро). Какие выводы можно сделать из полученной оценки, если учесть, что энергия связи ядерной частицы в ядре не превосходит 10 МэВ?

2.12. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет величину $\Delta t \sim 10^{-8}$ с. При переходе атома в основное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого равна $\lambda = 500$ нм. Оцените ширину $\Delta\lambda$ и относительную ширину $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов. (Такая ширина называется естественной шириной спектральной линии).

2.13. Длина волны λ излучаемого атомом фотона составляет $0{,}6$ мкм. Принимая время жизни возбужденного состояния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определите отношение естественной ширины ΔE возбужденного энергетического уровня к энергии E, излученной атомом.

2.14. Поток электронов с дебройлевской длиной волны $\lambda = 11$ мкм падает нормально на прямоугольную щель шириной $b = 0{,}10$ мм. Оцените с помощью соотношения неопределенностей угловую ширину пучка за щелью.

2.15. Прямолинейная траектория частицы в камере Вильсона представляет собой цепочку маленьких капелек тумана, размер которых $d = 1$ мкм. Можно ли, наблюдая след электрона с кинетической энергией $E_K = 1$ кэВ, обнаружить отклонение в его движении от классических законов?

2.16. С помощью соотношения неопределенностей оцените минимальную энергию E_1, которой может обладать частица массы m, находящаяся в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной a.

2.17. Используя соотношения неопределенностей Гейзенберга, получите оценочное соотношение, определяющее границы применимости классической механики для описания движения частицы в некоторой области пространства с характерным линейным размером L.

2.18. Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определите длину волны излучения λ, если среднее время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-8}$ с, а естественная ширина спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное $\Delta\lambda = 20$ фм.

2.19. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определите относительную неопределенность $\Delta p / p$ импульса этой частицы.

2.20. Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределенности Δx ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1% ?

3.1. Пользуясь решением задачи о гармоническом осцилляторе, найдите энергетический спектр частицы массы m_0 в потенциальной яме вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \dfrac{kx^2}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

Здесь $k = m_0\omega_0^{\,2}$, а ω_0 - собственная частота классического гармонического осциллятора.

3.2. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите массу частицы, если ширина ямы a и разность энергий второго и первого возбужденных состояний равна ΔE.

3.3. Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Координаты x и y частицы лежат в пределах $0 < x < a$, $0 < y < b$, где a и b - стороны ямы. Определите вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области: а) $0 < x < \frac{a}{4}\ (P_1)$; б) $0 < y < \frac{b}{4}\ (P_2)$; в) $0 < x < \frac{a}{4},\ 0 < y < \frac{b}{4}\ (P_3)$. Убедитесь, что $P_1 \cdot P_2 = P_3$.

3.4. Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками во втором возбужденном состоянии. Сторона ямы равна a. Определите вероятность нахождения частицы в области: а) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}\ (P_1)$; б) $\frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}\ (P_2)$; в) $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3},\ \frac{a}{3} < y < \frac{2a}{3}\ (P_3)$. Убедитесь, что $P_1 \cdot P_2 = P_3$.

3.5. Частица массой m_0 находится в основном состоянии в двумерной квадратной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите энергию частицы, если максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно w_m.

3.6. Частица массой m_0 находится в кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Найдите длину ребра куба, если разность энергий 6-го и 5-го уровней равна ΔE. Чему равна кратность вырождения 6-го и 5-го уровней?

3.7. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющей ширину a. В каких точках интервала $0 < x < a$ плотность вероятности обнаружения частицы одинакова для основного и второго возбужденного состояний?

3.8. Квантовый гармонический осциллятор находится в основном состоянии. Найдите вероятность P обнаружения частицы в области $-a < x < a$, где a - амплитуда классических колебаний.

3.9. Частица массой m_0 находится в одномерном потенциальном поле $U(x)$ в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией $\psi(x) = A\,\mathbf{exp}(-\alpha x^2)$, где A и α - заданные постоянные ($\alpha > 0$). Найдите энергию частицы и вид функции $U(x)$, если $U(0) = 0$.

3.10. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите отношение вероятностей нахождения частицы в средней трети ямы для первого и второго возбужденных состояний.

3.11. Частица массы m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите число dN энергетических уровней в интервале энергий $(E, E + dE)$, если уровни расположены весьма густо.

3.12. Частица массы m находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно P_m. Найдите ширину a ямы и энергию E частицы в данном состоянии.

3.13. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите ширину ямы, если минимальное энергетическое расстояние между уровнями электрона в яме равно тепловой энергии kT при комнатной температуре.

3.14. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите квантовое число n энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним уровней (верхнего и нижнего) относятся как $\eta:1$.

3.15. Частица массы m локализована в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме радиуса a с непроницаемыми стенками. Найдите волновые функции и уровни энергии частицы для состояний, в которых волновая функция зависит только от r.

Указание: Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$.

3.16. Частица массы m локализована в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме радиуса a с непроницаемыми стенками. Для состояния, в котором волновая функция частицы зависит только от r, максимальное значение плотности вероятности местонахождения частицы равно P_m. Найдите радиус ямы r и энергию частицы E в данном состоянии.

Указание: Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r)=\frac{u(r)}{r}$.

3.17. Электрон находится в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Найдите радиус ямы a, если для сферически симметричного состояния электрона значение минимальной энергии равно E_0.

Указание: Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r)=\frac{u(r)}{r}$.

3.18. Частица находится в трехмерной сферически симметричной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Считая состояние частицы сферически симметричным, найдите массу частицы m, если радиус ямы равен r_0, а минимальная энергия частицы E_0.

Указание: Волновую функцию частицы следует искать в виде $\psi(r)=\frac{u(r)}{r}$.

3.19. Определите разность соседних уровней энергии ΔE для частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме при больших значениях квантового числа n. Полученный результат используйте для оценки разности энергий соседних уровней молекул азота при комнатной температуре в сосуде. Масса молекулы азота $m=2{,}3\cdot10^{-26}$ кг, а линейный размер сосуда $a=0{,}1$ м. Сравните полученный результат с кинетической энергией поступательного движения молекул азота.

3.20. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найдите ширину ямы a, если разность энергий второго и первого возбужденных состояний $\Delta E=5$ эВ.

4.1. Электрон с энергией $E=4{,}9$ эВ падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой $U=5$ эВ. Оцените, при какой ширине барьера d коэффициент прохождения электрона через барьер D будет равен $0{,}2$?

4.2. Электрон, обладающий энергией $E = 50$ эВ, встречает на своем пути потенциальный порог высотой $U = 20$ эВ. Определите вероятность отражения электрона от этого порога.

4.3. Микрочастица падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причем $E>U_0$. Найдите коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности D этого барьера. Убедитесь, что значения этих коэффициентов не зависят от направления движения падающей частицы (слева направо или справа налево).

4.4. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через треугольный потенциальный барьер вида

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ U_0\left(1-\dfrac{x}{d}\right), & 0<x<d\\ 0, & x>d\end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$. Такой вид потенциального барьера соответствует барьеру, преодолеваемому электронами при холодной (полевой) эмиссии из металла.

4.5. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{d^2}\right), & 0 < x < d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

4.6. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < -d \\ U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{d^2}\right), & -d < x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

в зависимости от энергии частицы E при $E < U_0$.

4.7. Найдите коэффициент прохождения частицы массой m_0 через потенциальный барьер вида

$$U(x) = \begin{cases} U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{d^2}\right), & |x| < d, \\ 0 & |x| > d. \end{cases}$$

Такой вид потенциального барьера реально отражает барьер деления тяжелых ядер.

4.8. Считая, что радиоактивный α-распад происходит за счет туннелирования α-частицы через потенциальный барьер, получите закон радиоактивного α-распада, определяющий зависимость числа нераспавшихся ядер от времени распада t. Скорость α-частицы в материнском ядре равна v, радиус ядра - r_0, коэффициент прозрачности потенциального барьера - D, число нераспавшихся ядер в начальный момент времени – N_0.

4.9. Частица массы m_0 падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Энергия частицы равна E, причем $E < U_0$. Найдите эффективную глубину проникновения частицы в область порога, т.е. на расстояние от границы порога до точки, в которой плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз.

4.10. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0. Найдите приближенное выражение для коэффициента отражения R для случая $\dfrac{U_0}{E} << 1$.

4.11. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0. Найдите коэффициент прохождения ямы D для этой частицы.

4.12. Электрон с энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму шириной a и глубиной U_0. Найдите значения энергии E, при которых электрон будет беспрепятственно проходить через яму. Убедитесь, что это будет происходить при условии, что ширина ямы a равна целому числу дебройлевских полуволн частицы внутри ямы. Вычислите минимальную энергию электрона E_{min} при $U_0 = 10$ эВ и $a = 0{,}25$ нм.

4.13. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольную потенциальную яму глубиной U_0. Найдите ширину ямы a, при которой коэффициент отражения частицы от ямы R максимален.

4.14. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной a. Энергия частицы $E > U_0$. Найдите коэффициент "надбарьерного" отражения R и коэффициент прозрачности барьера D для этой частицы.

4.15. Частица массы m_0, обладающая энергией E, падает на прямоугольный потенциальный барьер высотой U_0 и шириной a. Энергия частицы $E > U_0$. Найдите значения энергии частицы E, при которых она будет беспрепятственно проходить через этот барьер. Вычислите первые два значения E для электрона при $U_0 = 10{,}0$ эВ и $a = 0{,}50$ нм.

4.16. Частица с энергией E падает на прямоугольный потенциальный порог высотой U_0 ($E > U_0$). Найдите приближенное выражение для коэффициента отражения R для случая $\dfrac{E - U_0}{U_0} << 1$.

4.17. В 1921 г. немецкий физик К. Рамзауэр обнаружил аномальную "прозрачность" атомов криптона для электронов с энергией $E = 0{,}6$ эВ. Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Моделируя поле атома с помощью одномерной прямоугольной потенциальной ямы глубиной $U_0 = 2{,}5$ эВ, оцените радиус атома криптона.

4. 18. Электрон с энергией $E = 1{,}5$ эВ находится в одномерной потенциальной яме шириной $a = 10^{-10}$ м. С одной стороны ямы потенциальная энергия $U(x)$ бесконечна, а с другой стороны выйти из ямы электрону мешает прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 2$ эВ и шириной $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените время жизни τ электрона в яме.

4.19. Протон с энергией $E = 1{,}5$ эВ находится в одномерной потенциальной яме шириной $a = 10^{-10}$ м. С одной стороны ямы потенциальная энергия $U(x)$ бесконечна, а с другой стороны выйти из ямы протону мешает прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 2$ эВ и шириной $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м. Оцените время жизни τ протона в яме. Сравните его со временем существования Вселенной (~$1{,}5 \cdot 10^{10}$ лет).

4.20. Оцените коэффициент прозрачности потенциального барьера, преодолеваемого α-

частицей при α-распаде. Зарядовое число ядра равно Z. Потенциальный барьер $U(r)$ имеет вертикальную стенку при $r = R$ (радиус ядра) и определяется законом Кулона при $r \geq R$. Энергия вылетающей α- частицы E много меньше высоты барьера.

5.1. Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A\,exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r - расстояние электрона от ядра, a - радиус первой боровской орбиты. Определите среднее значение квадрата расстояния $< r^2 >$ электрона от ядра в этом состоянии.

5.2. Частица находится в двумерной квадратной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбужденном состоянии. Найдите среднее значение квадрата импульса частицы $< p^2 >$, если сторона ямы равна a.

5.3. Частица массой m_0 находится в одномерной потенциальной яме с непроницаемыми стенками во втором возбужденном состоянии. Найдите среднее значение кинетической энергии частицы $< E_K >$, если ширина ямы равна a.

5.4. Возможные значения проекции момента импульса на произвольную ось равны $m\hbar$, где $m = l, l-1, \dots, -l+1, -l$. Считая, что эти проекции равновероятны и оси равноправны, покажите, что в состоянии с определенным значением l среднее значение квадрата момента импульса $< L^2 > = \hbar^2 l(l+1)$.

5.5. В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$), имеет вид $\psi(x) = Ax(a-x)$. Найдите среднюю кинетическую энергию частицы в этом состоянии, если масса частицы равна m_0.

5.6. В некоторый момент времени частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией, координатная часть которой имеет вид $\psi(x) = A\,exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ikx\right)$, где A и a - некоторые постоянные, а k - заданный параметр, имеющий размерность обратной длины. Найдите для данного состояния средние значения координаты $< x >$ и проекции импульса частицы $< p_x >$.

5.7. В некоторый момент времени координатная часть волновой функции частицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0 < x < a$), имеет вид $\psi(x) = A\,sin^2\frac{\pi x}{a}$. Найдите вероятность пребывания частицы в основном состоянии.

5.8. Найдите средние значения кинетической и потенциальной энергий квантового осциллятора с частотой ω_0 в основном состоянии, описываемом волновой функцией

$\psi(x) = A\,exp\left(-\dfrac{m_0\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$, где A - некоторая постоянная, а m_0 - масса осциллятора.

5.9. Докажите, что квадрат момента импульса частицы L^2 может быть одновременно измерим с кинетической энергией частицы E_K.

Указание: Рассмотрите коммутатор операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{E}_K$.

5.10. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,sin\frac{3\pi x}{2a}\,cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднюю кинетическую энергию частицы в данном состоянии.

5.11. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,sin\frac{2\pi x}{a}\,cos\frac{\pi x}{a}.$$

Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.12. Определите среднее значение кинетической энергии $< E_{кин} >$ и средней квадратической скорости электрона $v_{кв}$ в основном состоянии атома водорода.

5.13. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,sin\frac{5\pi x}{2a}\,cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднюю кинетическую энергию частицы в данном состоянии.

5.14. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с непроницаемыми стенками является равновероятной суперпозицией второго и четвертого возбужденных состояний. Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднее значение импульса частицы в данном состоянии.

5.15. В одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a с непроницаемыми стенками находится частица в состоянии $\psi(x) = A\,sin^2\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$. Определите вероятность ее пребывания в основном состоянии.

5.16. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,sin\frac{3\pi x}{2a}\,cos\frac{\pi x}{a}\,cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднюю энергию частицы и вероятность ее обнаружения в первом возбужденном состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.17. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы (массы m) в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,\sin\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{2a}.$$

Считая, что масса частицы равна m_0, найдите среднее значение импульса частицы и вероятность ее обнаружения во втором возбужденном состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.18. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы (массы m) в одномерной потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками имеет вид

$$\psi(x) = A\,\sin\frac{3\pi x}{a}\cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{\pi x}{a}.$$

Найдите среднее значение координаты частицы и вероятность ее обнаружения во втором возбужденном состоянии. Является ли состояние частицы стационарным?

5.19. Определите результаты измерения проекции импульса L_z и их вероятности для системы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(\varphi) = A(1 + \sin 2\varphi),$$

где φ - азимутальный угол.

5.20. Определите результаты измерения проекции импульса L_z и их вероятности для системы, находящейся в состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi(\varphi) = A(1 + \cos\varphi),$$

где φ - азимутальный угол.